**Exercice 2. Autour des endomorphismes nilpotents**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

On dit qu'un endomorphisme $u$ de $E$ est **nilpotent** s'il existe un entier naturel $p$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Le plus petit entier naturel $p$ vérifiant $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ est appelé **indice de nilpotence** de $u$.

## Partie I - Indice de nipotence

Dans cette partie, on considère $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence $p$.

**Q1.** Montrer que $u$ n'est pas un automorphisme.

Par l'absurde, supposons que $u$ est un automorphisme. En composant la relation $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ par $u^{-1}$ $(p-1)$ fois, on obtient $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui est manifestement en contradiction avec le fait que $u$ soit inversible. Ainsi $\boxed{u \text{ n'est pas un automorphisme de } E}$.

**Q2.** Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre.

- Par minimalité de $p$, $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et en particulier il existe $x \in E$ non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que ce vecteur $x$ convient.
- Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$. En composant par $u^{p-1}$, par linéarité, il ne reste que $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0_E$. Or d'après le choix de $x$, on a $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ donc nécessairement $\lambda_0 = 0$. En répétant ce procédé en composant par $u^{p-2}$, on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite. Finalement $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$, *i.e.* $\boxed{\text{la famille } \big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big) \text{ est libre}}$.

**Q3.** En déduire que l'indice de nilpotence vérifie l'inégalité $p \leqslant n$.

D'après la question précédente, on dispose d'une famille libre de $p$ vecteurs de $E$. Comme $\dim E = n$, on a nécessairement $\boxed{p \leqslant n}$.

## Partie II - Un résultat de réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence $p$.

**Q4.** Établir que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe un sous-espace vectoriel $F_k$ de $E$ tel que

$$\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k.$$

Montrer qu'alors $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Soit $k \in \{1, \dots, p\}$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k-1})$, *i.e.* $u^{k-1}(x) = 0_E$. Alors, $u^k(x) = u(u^{k-1}(x)) = u(0_E) = 0_E$, *i.e.* $x \in \mathrm{Ker}(u^k)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}(u^k)$. De plus, ces deux ensembles ont naturellement une structure d'espace vectoriel en tant que noyaux d'applications linéaires. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u^{k-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(u^k)$.
- Or $\mathrm{Ker}(u^k)$ est de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel de $E$ qui est de dimension finie. En particulier $\boxed{\mathrm{Ker}(u^{k-1}) \text{ admet un supplémentaire } F_k \text{ dans } \mathrm{Ker}(u^k)}$.
- Enfin, comme $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a $E = \mathrm{Ker}(u^p)$. D'après le point précédent pour $k = p$, il vient $E = \mathrm{Ker}(u^{p-1}) \oplus F_p$. En utilisant successivement le point précédent pour $k$ décroissant de $p-1$ à 1, on obtient $E = \mathrm{Ker}(u^0) \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Or $\mathrm{Ker}(u^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ (et en particulier $F_1 = \mathrm{Ker}(u)$), d'où $\boxed{E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p}$.

**Q5.** En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls.

Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe obtenue à la question précédente. Alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure par blocs avec des blocs diagonaux nuls. En effet, pour tout $x \in F_1 = \mathrm{Ker}(u)$ (cf question précédente), on a $u(x) = 0_E$ d'où une première colonne de blocs nuls. Ensuite, pour tout $x \in F_2$, par définition de $F_2$, on a $u^2(x) = 0_E$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u) = F_1$ et ainsi de suite.

Comme la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure par blocs avec des blocs diagonaux nuls, elle est en particulier triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls.

**Q6.** Réciproquement, soient $v \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $v$ est nilpotent.

*Méthode 1 (sans réduction)* : on raisonne par récurrence sur la taille de la matrice et on procède par blocs, voir TD4 exercice 9 fait en classe.

*Méthode 2 (avec réduction)* : Les hypothèses sur $v$ signifient que $v$ est trigonalisable et que toutes ses valeurs propres sont nulles. En particulier son polynôme caractéristique vaut $X^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $v^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$, *i.e.* $\boxed{v \text{ est nilpotent}}$.

## Partie III - Deux applications

On rappelle que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

**Q7.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u$ est nilpotent si et seulement

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u^2) = \cdots = \mathrm{tr}(u^n) = 0.$$

*Pour le sens réciproque, on pourra considérer les éventuelles valeurs propres non nulles de $u$.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $u$ nilpotent. D'après **Q5**, il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls. En particulier $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(M) = 0$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = M^k$ qui est aussi triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls donc $\mathrm{tr}(u^k) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u^2) = \cdots = \mathrm{tr}(u^n) = 0$.
Tout d'abord, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $u$ dans une base donnée de $E$. D'après le résultat rappelé, en considérant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M$ est semblable à une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $M$ (donc de $u$) comptées avec multiplicité.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les éventuelles valeurs propres non nulles de $u$ (en particulier $r \leqslant n$), deux à deux distinctes, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$. Alors, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$0 = \mathrm{tr}(u^k) = \mathrm{tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k \qquad (\diamondsuit_k).$$

Les équations $(\diamondsuit_1)$, $\ldots$, $(\diamondsuit_r)$ forment un système linéaire d'inconnues $m_1, \ldots, m_r$ dont la matrice associée est (la transposée d')une matrice de Vandermonde associée aux réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. D'après le cours, comme les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts, le déterminant de cette matrice est non nul donc ce système admet pour une unique solution $m_1 = \cdots = m_r = 0$. Autrement dit $u$ n'admet aucune valeur propre non nulle, la matrice $T$ est donc triangulaire supérieure à coefficients diagonaux nuls. Finalement, d'après **Q6**, on en déduit que $u$ est nilpotent.

**Q8.** Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ avec $v$ nilpotent et $u \circ v = v \circ u$.
Montrer que $\det(u + v) = \det(u)$.

Distinguons les cas selon que $u$ est inversible ou non.

- Supposons $u$ inversible. Alors $\det(u + v) = \det(u \circ (\mathrm{id}_E + u^{-1} \circ v)) = \det(u)\det(\mathrm{id}_E + w)$ où l'on a posé $w = u^{-1} \circ v$.

Comme $u$ et $v$ commutent, il en est de même de $u^{-1}$ et $v$. Alors $w^n = (u^{-1} \circ v)^n = (u^{-1})^n \circ v^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ car $v^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (cf **Q3**).

Comme $w$ est nilpotent, d'après **Q5**, dans une certaine base $w$ est représenté par une matrice $T$ triangulaire supérieure stricte. On a alors $\det(\mathrm{id}_E + w) = \det(\mathrm{I}_n + T) = 1$ (déterminant d'une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1), d'où $\boxed{\det(u+v) = \det(u)}$.

- Supposons maintenant que $u$ n'est pas inversible. Comme $E$ est de dimension finie, $u$ n'est pas injective, *i.e.* $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.

Par ailleurs, comme $u$ et $v$ commutent, $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par $v$ donc on peut considérer $v_K$ l'endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u)$ induit par $v$.

Comme $v$ est nilpotent, il en est de même de $v_K$. En particulier, d'après **Q1**, $v_K$ n'est pas bijectif donc (dimension finie) pas injectif. Soit alors $x$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(v_K)$. Par construction $x \in \big(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(u)\big) \setminus \{0_E\}$ donc $(u+v)(x) = 0_E$, autrement dit $u+v$ n'est pas injectif donc pas bijectif. On en déduit que $\boxed{\det(u+v) = 0 = \det(u)}$.